

der qualitative Gang der Eigenschaften jedoch feststehen. Die Breite der verbotenen Zone nimmt in der isoelektronischen Reihe laufend zu, die Elektronenbeweglichkeit durchläuft ein Maximum bei

	$\alpha$ -Sn	InSb	CdTe	AgJ
$\Delta E$	0,08	0,27	1,8	$\approx 2,8$ [eV]
$\mu_n$ (250° K)	1560	80 000	$\approx 300$	$\approx 30$ [cm <sup>2</sup> /V sec]

Tab. 2.

den A<sup>III</sup>B<sup>V</sup>-Verbindungen und sinkt dann zum Ionenkristall hin stark ab.

Ein ganz ähnliches Verhalten zeigt die vom Germanium ausgehende isoelektronische Reihe Ge, GaAs, ZnSe, CuBr, die auch noch durchweg im Zinkblendegitter kristallisiert.

Für wertvolle Anregungen und Diskussionen danke ich den Herren Prof. Dr. W. Schottky und Prof. Dr. H. Welker.

# Elastische Elektronenstreuung an ausgedehnten Atomkernen bei mittleren Energien

Von E. FREESE und K. HAIN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 9a, 456—462 [1954]; eingegangen am 13. März 1954)

Die endliche Größe der Atomkerne wirkt sich auch auf die elastische Streuung von Elektronen aus, deren kinetische Energie wenig größer als die Ruhenergie ist: Die Elektronenwellenlänge ist zwar in weiter Entfernung vom Kern sehr viel größer als der Kerndurchmesser; wenn ein Elektron aber bis an den Rand eines großen Kerns herankommt, gewinnt es durch die Coulomb-Anziehung soviel Energie, daß seine Wellenlänge mit den Kerndimensionen vergleichbar wird. Die Abweichung gegenüber der Streuung am punktförmigen Kern wird für den homogen und oberflächengeladenen Hg-Kern (mit scharfem Kernrand) berechnet. Bei 2,2 MeV kann sie schon bis zu 10% betragen.

Fliegen Elektronen durch Atome hindurch, so werden sie durch Elektronenhülle und Kern abgelenkt und verlieren dabei Energie an das Atom oder durch Ausstrahlung von Lichtquanten. Rein elastisch, d. h. ohne jede Energieabgabe, können sie in Wirklichkeit gar nicht gestreut werden; sondern das in der Umgebung des Elektrons vorhandene elektromagnetische Feld (Coulomb-Feld) gibt bei Beschleunigung des Elektrons immer etwas Energie in Form von Lichtquanten (Bremsquanten) ab. Am wahrscheinlichsten werden allerdings sehr energiearme Lichtquanten ausgesandt (im Infrarotbereich); daher bleibt der Energieverlust des Elektrons in den üblichen Experimenten unbeobachtbar. — Das genaue Verhalten des Elektrons bei der Streuung folgt aus der Quantenelektrodynamik. Die Durchrechnung liefert als wichtigstes Ergebnis, daß die bisherige Rechnung mittels der gewöhnlichen Quantentheorie für „rein elastische Streuung“ des Elektrons an einem äußeren Potentialfeld (unter Ein-schluß des Elektronenaustausches) eine gute Näherung ist, wenn der Elektronennachweisapparat alle gestreuten Elektronen mißt, gleichgültig welche Energie sie durch Bremsstrahlung verloren haben.

Die Abweichung von dieser quantentheoretischen Näherung ist von Schwinger mit Hilfe der Quantenelektrodynamik in Bornscher Näherung für die Streuung am Atomkern berechnet worden<sup>1</sup> (gültig für große Energien und kleine Winkel bzw. kleine Kernladungszahlen). Sie ist proportional  $\log E/\Delta E$ , wo  $\Delta E$  der Energieverlust ist, den ein Elektron der Energie  $E$  erlitten haben darf, um gerade noch vom Nachweisapparat angezeigt zu werden. Da das Auflösungsvermögen für verschiedene Elektronenenergien bei den bisherigen experimentellen Apparaturen nicht besonders groß ist, wollen wir im folgenden die Strahlungskorrekturen vernachlässigen, also die gewöhnliche Quantentheorie benutzen. Bei mittleren Energien (Größenordnung der Elektronruhmasse) genügt es, allein die elastische Streuung zu berechnen, denn sie ist inkohärent mit der unelastischen (d. h. der Anregung des Atoms), die bei diesen Energien sehr klein bleibt.

Die elastische Streuung wird bei nicht zu kleinen Energien in erster Näherung durch die Streuung

<sup>1</sup> J. Schwinger, Phys. Rev. 75, 898 (L) [1949].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

an einem punktförmigen Atomkern beschrieben<sup>2,3,4</sup>. Abweichungen davon gibt es bei kleineren Energien (für alle Winkel und bei allen Energien für sehr kleine Winkel) durch den Einfluß der Atomhülle. Werden die Elektronen nur um kleine Winkel abgelenkt, so kommen sie dem Kern nicht sehr nahe und merken die Wirkung der Elektronenhülle: Das tatsächlich auf sie wirkende Potential fällt langsamer ab, als das Coulomb-Potential des Kernes. Zur Rechnung genügt es, die Fermi- oder Hartree-Verteilung der Atomelektronen zu benutzen<sup>5</sup>. — Bei Streuung um große Winkel fliegt das Elektron sehr nahe am Kern vorbei (bzw. durch ihn hindurch) und verspürt fast nur noch den Einfluß des Kern-Coulomb-Feldes. Nur wenn die Zeit, die es braucht, um den Raumbereich eines Atomelektrons zu durchfliegen, etwa gleich dessen klassischer Umlaufsperiode ist, wird es resonanzartig mit ihm wechselwirken und sich austauschen können. Das geschieht, wenn seine kinetische Energie (oder genauer seine mittlere kinetische Energie an den verschiedenen Orten des Atomelektrons) ungefähr gleich der Bindungsenergie (im Bohrschen Modell) des Atomelektrons ist. Da diese Bindungsenergie, selbst für die K-Schale der schwersten Atomkerne, höchstens 100 keV beträgt, wird die Elektronenhülle die Streuung höchstens bis zu Energien der Größenordnung 100 keV verändern\*.

Bei mittleren und großen Energien (vergleichbar bzw. groß gegen die Elektronenruhmasse) ist die Elektronenhülle völlig unwesentlich, außer für die Streuung um ganz kleine Winkel. Aber hier ist die Wellenlänge des Elektrons vergleichbar mit dem Kernradius. Die von den verschiedenen Stellen des Atomkerns zurückgeworfenen Teile der Elektronenwelle interferieren miteinander und verkleinern so den Wirkungsquerschnitt gegenüber der Streuung am punktförmigen Kern. Besonders bei Streuung an großen Kernen und um große Winkel kann der Wirkungsquerschnitt dadurch völlig verändert werden<sup>6</sup>. Die Verkleinerung des Wirkungsquerschnittes kann

man auch im Teilchenbild verstehen: Das Elektron erfährt im Innern des Atomkerns eine kleinere Kraft, als es bei punktförmigem Kern an derselben Stelle verspürt hätte. — Gewöhnlich nimmt man zwar an, daß bei Elektronen mittlerer Energie die endliche Ausdehnung des Kerns wegen ihrer großen Wellenlänge keine Bedeutung hat; aber man muß bedenken, daß die Elektronen durch das Coulomb-Feld beschleunigt werden und bei Annäherung an den Kernrand die Energie  $Ze^2/R \approx ZA^{1/3}$  in MeV (= 13 MeV für Hg) gewinnen ( $R = R_0 A^{1/3}$  mit  $R_0 = 1,45 \cdot 10^{-13}$  cm). Dadurch wird ihre Wellenlänge  $\lambda$  jedenfalls kleiner als  $20 R_0$ , also z. B. für Hg vergleichbar mit dem Kernradius  $R \approx 6 R_0$ . Nur die genaue quantentheoretische Durchrechnung kann entscheiden, wie groß der Einfluß der endlichen Kerngröße bei den verschiedenen Energien ist. Diese Rechnung wird im folgenden durchgeführt, die Ergebnisse sind am Schluß zusammengefaßt.

### I. Die Grundlagen der Rechnung

Für ein Elektron, das sich in einem zentralsymmetrischen Potentialfeld  $V(r)$  bewegt, kann die 4-komponentige Dirac-Gleichung bekanntlich auf eine 2-komponentige reduziert werden<sup>7</sup>. Diese ist bezüglich der Winkel- und der radialen Abhängigkeit separierbar, und für die vom Radius abhängigen Funktionen gelten in einer bestimmten Darstellung<sup>7</sup> die beiden Gleichungen (vgl. auch<sup>2</sup>)

$$\begin{aligned} (K_1 - U(r)) F_\nu(r) + \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu-1}{r} \right) G_\nu(r) &= 0, \\ -(K_2 - U(r)) G_\nu(r) + \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu+1}{r} \right) F_\nu(r) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

mit

$$K_1 = \frac{E + mc^2}{\hbar c}, \quad K_2 = \frac{E - mc^2}{\hbar c},$$

$$K_1 K_2 = K^2 = \frac{E^2 - m^2 c^4}{(\hbar c)^2}.$$

$U(r) = V(r)/\hbar c$ ,  $E = \varepsilon \cdot 2mc^2 =$  Gesamtenergie des Elektrons. Die verschiedenen Werte von  $\nu$  entspre-

<sup>2</sup> N. F. Mott u. H. S. W. Massey, The Theory of Atomic Collisions, Oxford, Clarendon Press.

<sup>3</sup> J. A. Bartlett u. T. A. Welton, Phys. Rev. **59**, 281 [1941]. — C. B. O. Moor, Proc. Roy. Soc. A **182**, 189 [1943].

<sup>4</sup> W. A. Mc Kinley u. H. Feshbach, Phys. Rev. **74**, 1759 [1948]. — H. Feshbach, ebd. **88**, 295 [1953].

<sup>5</sup> J. B. Bartlett u. R. E. Watson, Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **74**, 53 [1940].

\* Vgl. die Rechnungen am He von Massey und Mohr, Proc. Phys. Soc. A **132**, 605 [1931].

<sup>6</sup> M. E. Rose, Phys. Rev. **73**, 279 [1948]. — J. R. B. Elton, ebd. **79**, 412 [1950]. — G. Parzen, ebd. **80**, 355 [1950]. — L. K. Acheson, ebd. **82**, 488 [1951]. — H. Feshbach, ebd. **84**, 1206 [1951].

<sup>7</sup> P. A. M. Dirac, The principles of Quantum Mechanics, 3. Edition. Anders als dort wird hier die Darstellung  $\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{x}}{r} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$  gewählt<sup>2</sup>.

chen den verschiedenen Quantenzahlen des Gesamtdrehimpulses ( $j$ ) bzw. des Bahndrehimpulses ( $l$ ):

$$\nu = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots \end{array} \right\} = + \left\{ j + \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} l+1 \\ l \end{array} \right\},$$

$$j = \begin{array}{cccc} 1/2 & 3/2 & 5/2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots \end{array},$$

$$l = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots$$

Die beiden Gln. (1) müssen unter folgenden Bedingungen gelöst werden:

1.  $F_\nu$  und  $G_\nu$  sind überall endlich.
2.  $G_\nu$  verhält sich für große  $r$  wie

$$\frac{\sin \left( K r + \gamma \ln 2 K r - \frac{1}{2} \pi + \eta_\nu \right)}{K r}.$$

Das Glied  $\gamma = Z\alpha \frac{K_1 + K_2}{2K}$  tritt nur auf, wenn das Potential sich für große  $r$  wie das Coulomb-Potential  $-Ze^2/r$  verhält, sonst ist  $\gamma = 0^2$ .

Die Phasen  $\eta_\nu$  müssen durch Lösung der Gl. (1) bestimmt werden; sie hängen von der speziellen Form des Potentials und der Energie des einfallenden Elektrons ab. Für reines Coulomb-Potential sind die Phasen (wir wollen sie dann  $\eta_\nu^0$  nennen) durch analytische Funktionen gegeben<sup>2</sup>, im vorliegenden Fall müssen sie numerisch berechnet werden. In den beiden Grenzfällen sehr großer und sehr kleiner Energie gibt es einfache Beziehungen zwischen  $\eta_{-\nu}$  und  $\eta_\nu$ , nicht aber bei den hier betrachteten mittleren Energien. Die verschiedenen Fälle sind folgendermaßen gekennzeichnet:

$$\begin{array}{ccccccc} \eta_1 & \eta_{-1} & \eta_2 & \eta_{-2} & \eta_3 & \dots & \left\{ \begin{array}{l} \text{bei unrelativistischen} \\ \text{Energien}^2 \end{array} \right. \\ > & > & > & > & > \dots \\ & & & & & & \text{bei mittleren Ener-} \\ & & & & & & \text{gien} \\ = & > & = & > & = \dots & \text{bei großen Energien} \\ & & & & & & \text{(Bew. s. unten II, 3).} \end{array}$$

Wenn die Phasen  $\eta_\nu$  bekannt sind, folgt der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung von unpolarisierten Elektronen<sup>2</sup>:

$$\sigma(\Theta) = |f(\Theta)|^2 + |g(\Theta)|^2$$

mit

$$f(\Theta) = \frac{1}{2iK} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu [(e^{2i\eta_\nu} - 1) P_{\nu-1}(\cos \Theta) + (e^{2i\eta_{-\nu}} - 1) P_\nu(\cos \Theta)], \quad (2)$$

$$g(\Theta) = \frac{1}{2iK} \sum_{\nu=1}^{\infty} [e^{2i\eta_{-\nu}} P_{\nu-1}^1(\cos \Theta) + e^{2i\eta_\nu} P_\nu^1(\cos \Theta)],$$

dabei sind  $P_\nu$  und  $P_\nu^1$  die zugeordneten Kugelfunktionen.

Für den punktförmigen Atomkern sind  $f$ ,  $g$  und  $\sigma$  durch die Rechnungen von Mott<sup>2</sup>, McKinley und Feshbach<sup>4</sup> (für große Energien und nicht allzu große Winkel) und Bartlett und Watson<sup>5</sup> (für mittlere Energien und alle Winkel im Spezialfall des Quecksilbers) bekannt, wir brauchen im folgenden also nur die Abweichungen hiervon zu berechnen. Die endliche Ausdehnung des Kernes kann sich nur dann auf die Streuung auswirken, wenn das Elektron in den Kern hineinfliegt, d. h. wenn der Drehimpuls des Elektrons (bzw.  $\nu$ ) sehr klein ist. Bei den hier betrachteten Energien genügt es daher völlig, nur die Änderung der beiden Phasen  $\eta_1$  und  $\eta_{-1}$  zu berechnen, für höhere Phasen ist der Effekt vernachlässigbar klein.

## II. Der Gang der Rechnung

Die Rechnung führen wir ähnlich wie Acheson<sup>6</sup> durch, allerdings können wir hier nicht die Ruhmasse gegenüber der Energie vernachlässigen und daher im Kerninnern keine analytische Lösung angeben. Als Potential benutzen wir *im Kerninnern* ( $r \leq R$ ) die beiden Möglichkeiten des homogen geladenen Kernes ( $q=1$ ) und des oberflächengeladenen Kernes ( $q=0$ ):

$$U_i = -\frac{\alpha Z}{R} \left\{ 1 + \frac{q}{2} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \right\}, \quad (3)$$

*außerhalb des Kernes* ( $r \geq R$ ) das reine Coulomb-Potential

$$U_a = -\frac{\alpha Z}{r}. \quad (4)$$

### 1. Lösung für $r \leq R$

Die Lösung der Gl. (1) wird im Kerninnern numerisch bestimmt, außerhalb ist sie durch die hypergeometrischen Funktionen gegeben, am Kernrand müssen die Funktionen stetig ineinander übergehen.

Für das Kerninnere führen wir den dimensionslosen Parameter  $x = r/R$  ein und nennen

$$\mathfrak{F}_\nu(x) = F_\nu(r), \quad \mathfrak{G}_\nu(x) = G_\nu(r), \quad k_i = R \cdot K_i; \quad (5)$$

$$\text{mit } v_i = k_i + \alpha Z \left( 1 + \frac{q}{2} \right), \quad w = \alpha Z \frac{q}{2} \quad (6)$$

heißten dann die Gl. (1)

$$\begin{aligned} (v_1 - wx^2) \mathfrak{F}_\nu + \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\nu-1}{x} \right) \mathfrak{G}_\nu &= 0, \\ -(v_2 - wx^2) \mathfrak{G}_\nu + \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu+1}{x} \right) \mathfrak{F}_\nu &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Zunächst muß das Verhalten von  $\mathfrak{F}_\nu$  und  $\mathfrak{G}_\nu$  im Nullpunkt (= Stelle der Bestimmtheit) ermittelt werden: Wenn wir fordern, daß  $\mathfrak{F}_\nu$  und  $\mathfrak{G}_\nu$  überall endlich sein sollen, läßt der Ansatz

$$\mathfrak{F}_\nu = x^\sigma \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu, \quad \mathfrak{G}_\nu = x^\tau \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu x^\mu \quad (8)$$

nur folgende Werte für  $\sigma$  und  $\tau$  zu:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = \nu \\ \tau = \nu - 1 \end{array} \right\} \text{für } \nu > 0, \quad \left. \begin{array}{l} \sigma = |\nu| - 1 \\ \tau = |\nu| \end{array} \right\} \text{für } \nu < 0.$$

Einen der Entwicklungskoeffizienten können wir willkürlich wählen, alle anderen sind durch die Gln. (7) festgelegt. Wir wählen

$$b_0 = 1 \quad \text{für } \nu > 0, \quad a_0 = 1 \quad \text{für } \nu < 0.$$

Die weiteren Koeffizienten lassen sich aus den folgenden Rekursionsformeln durch wechselseitiges Einsetzen berechnen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } \nu > 0 \\ b_\mu = \frac{1}{\mu} (-v_1 a_{\mu-2} \\ \quad + w a_{\mu-4}) \\ a_\mu = \frac{1}{2\nu+1+\mu} (v_2 b_\mu \\ \quad - w b_{\mu-2}) \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \text{für } \nu < 0 \\ a_\mu = \frac{1}{\mu} (v_2 b_{\mu-2} \\ \quad + w b_{\mu-4}) \\ b_\mu = \frac{1}{2\nu-1-\mu} (v_1 a_\mu \\ \quad - w a_{\mu-2}). \end{array} \right\} \quad (9)$$

Die weitere Rechnung ist einfach, da wir nur die Funktionswerte von  $F$  und  $G$ , sowie ihre Ableitungen am Kernrand (d. h.  $x=1$ ) benötigen. (Es ist einfacher, das gekoppelte Gleichungssystem (1) direkt zu benutzen — die Koeffizienten lassen sich nach (9) zumindest auf einer Elektronen-Rechenmaschine leicht ausrechnen — als, wie meist üblich, zuerst eine Differentialgleichung zweiten Grades herzustellen.)

## 2. Lösung für $r \geq R$

Für die Gebiete außerhalb des Kernes kann man die Funktionen  $F_\nu$  und  $G_\nu$  durch komplexe Funktionen  $\psi_\nu$  und  $\varphi_\nu$  ausdrücken, für welche die Wittackersche Differentialgleichung gilt; die allgemeine Lösung läßt sich also durch die konfluenten hypergeometrischen Funktionen darstellen. Der Zusammenhang wird durch den folgenden Ansatz vermittelt

$$\begin{aligned} F_\nu &= i \sqrt{\frac{K_2}{K}} \frac{1}{r^{3/2}} \{ \psi_\nu - \varphi_\nu \}, \\ G_\nu &= \sqrt{\frac{K_1}{K}} \frac{1}{r^{3/2}} \{ \psi_\nu + \varphi_\nu \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Da hier  $F_\nu$  und  $G_\nu$  reell, sind  $\psi_\nu$  und  $\varphi_\nu$  konjugiert komplex zueinander:

$$\varphi_\nu = \psi_\nu^*. \quad (11)$$

Durch Einsetzen von (10) in (1) erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2r} - i \left( K + \frac{\gamma}{r} \right) \right\} \psi_\nu + \left\{ \frac{\nu}{r} - i \frac{\gamma'}{r} \right\} \varphi_\nu - \psi'_\nu &= 0, \\ \left\{ \frac{\nu}{r} + i \frac{\gamma'}{r} \right\} \psi_\nu + \left\{ \frac{1}{2r} + i \left( K + \frac{\gamma}{r} \right) \right\} \varphi_\nu - \varphi'_\nu &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha Z \frac{K_1 + K_2}{2K} = \alpha Z \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \frac{1}{4}}}, \\ \gamma' &= \alpha Z \frac{K_1 - K_2}{2K} = \alpha Z \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - \frac{1}{4}}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Koeffizienten der zweiten Gleichung sind die konjugiert komplexen der ersten, eine andere Form von Gl. (11). Aus den beiden Gleichungen für  $\psi$  und  $\varphi$  erhält man eine für  $\psi$  (bzw.  $\varphi$ ):

$$\psi'' + \left\{ \left( \frac{1}{4} - \varrho^2 \right) \frac{1}{r^2} + \left( \frac{1}{2} - i\gamma \right) \frac{2iK}{r} + K^2 \right\} \psi = 0 \quad (14)$$

mit

$$\varrho^2 = \nu^2 - \alpha^2 Z^2.$$

Sie ist äquivalent der Wittackerschen Differentialgleichung<sup>8</sup>, die durch Variablentransformation  $s = 2ikr$  folgt. Die beiden linear unabhängigen Lösungen sind<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= r^{\varrho + \frac{1}{2}} e^{-iKr} {}_1F_1(\varrho + i\gamma; 2\varrho + 1; 2iKr), \\ \psi_2 &= r^{\varrho + \frac{1}{2}} e^{-iKr} {}_1F_1(-\varrho + i\gamma; -2\varrho + 1; 2iKr). \end{aligned} \quad (15)$$

Die allgemeine Lösung für  $\psi_\nu$  ist

$$\psi = A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 = A_1 \{ \psi_1 + A \psi_2 \} \quad (16)$$

und damit für

$$\varphi = A_1^* \psi_1^* + A_2^* \psi_2^* = A_1 B \{ \psi_1^* + A^* \psi_2^* \}.$$

Die Konstanten  $A = A_2/A_1$  und  $B = A_1^*/A_1$  wurden eingeführt, weil sie und nicht die Größen  $A_1$  und  $A_2$  für die folgende Rechnung wichtig sind; uns interessiert nur das asymptotische Verhalten der Funktionen, nicht ihre Größe.

*Bestimmung von A*

Für den punktförmigen Kern ist  $A=0$ , denn  $\psi$  muß im Nullpunkt endlich bleiben.

<sup>8</sup> E. T. Whittaker u. G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press.



Für den ausgedehnten Kern folgt  $A$  aus der Stetigkeitsforderung für  $F_\nu$  und  $G_\nu$  am Kernrand. Die Rechnung ist etwas bequemer, wenn man die Definition von  $\psi_\nu$  in Gl. (10) auch für das Kerninnere fortsetzt und  $A$  aus der Forderung der Stetigkeit von  $\psi$  und  $\psi'$  am Kernrand bestimmt: Wenn  $F_\nu$  und  $G_\nu$  stetig sind, folgt aus den Differentialgl. (1), daß auch  $F'_\nu$  und  $G'_\nu$  und damit auch  $\psi$  und  $\psi'$  am Kernrand stetig sein müssen. Damit wird

$$A = - \frac{\psi_1}{\psi_2} \cdot \frac{\ln' \psi_i - \ln' \psi_1}{\ln' \psi_i - \ln' \psi_2} \Big|_{r=R} \quad (17)$$

mit

$$\ln' \psi_{vi} = \frac{1}{R} \left\{ \frac{\mathfrak{F}'_\nu + i \frac{K_2}{K} \mathfrak{G}'_\nu}{\mathfrak{F}'_\nu + i \frac{K_2}{K} \mathfrak{G}'_\nu} + \frac{3}{2x} \right\}_{x=1}$$

Für  $2k \gtrsim 1$  konvergiert die Potenzreihenentwicklung von  ${}_1F_1$  schlecht, es wurden daher bis zu 20 Glieder berücksichtigt; d. h. Genauigkeit mindestens  $5 \cdot 10^{-6}$ .

#### Bestimmung von $B$

Die Größe  $B$  muß so gewählt werden, daß das simultane Differentialgleichungssystem für  $\psi$  und  $\varphi$  durch den Ansatz wirklich gelöst wird. Für den punktförmigen Kern (d. h.  $A=0$ ) folgt aus der ersten Gl. (12) (man setze  $r=0$ )

$$B_c = \frac{\varrho_\nu + i\gamma}{\nu - i\gamma'} \quad \text{und aus der zweiten} \quad B_c = \frac{\nu + i\gamma'}{\varrho_\nu - i\gamma'},$$

(wegen  $\varrho^2 = \nu^2 - (\alpha Z)^2$  stimmen die beiden Ergebnisse überein).

Für den ausgedehnten Kern erhält man aus (12) (man benutze das Verhalten von  $\psi_1$  und  $\psi_2$  für  $r \rightarrow \infty^2$ ).

$$B = B_c \frac{1 + A\kappa_a}{1 + A^*\kappa_b^*} = B_c \frac{1 + A\kappa_b}{1 + A^*\kappa_a^*},$$

dabei sind  $\kappa_a$  und  $\kappa_b$  wie bei Acheson definiert, wenn man überall  $\alpha$  durch  $\gamma$  ersetzt\*.

Damit diese beiden Ausdrücke für  $B$  wirklich gleich sind, muß  $A$  einer bestimmten Bedingung genügen, die zugleich gewährleistet, daß  $B$  den Betrag 1 hat, wie es nach seiner Definition sein muß. Diese Bedingung für  $A$  ist automatisch erfüllt, weil für das Kerninnere  $F_\nu$  und  $G_\nu$  Lösungen des gekoppelten Differentialgleichungssystems (1) sind.

Unter Benutzung der beiden Möglichkeiten für  $B$  (bzw.  $B_c$ ) kann man andere Formen für  $B$  herleiten,

\* Die Werte der  $\Gamma$ -Funktion wurden entnommen der „Table of the reciprocal of the Gamma Function for Complex Argument“ by Stanley and Wilkes, University of Toronto.

in denen der Nenner das konjugiert Komplexe des Zählers ist, bei denen man also von vornherein sieht, daß  $B$  den Betrag 1 hat. Eine dieser Möglichkeiten ist jeweils die von Acheson angegebene; man erhält sie direkt, wenn man  $\psi_\nu$  und  $\varphi_\nu$  auf  $F_\nu$  und  $G_\nu$  umrechnet und in die erste Gl. (1) einsetzt. Unsere Ausdrücke für  $B$  sind sehr viel einfacher; bei der numerischen Rechnung weicht der Betrag von unserem  $B$  natürlich etwas von 1 ab, die Größe der Abweichung kann als Maß für die Rechengenauigkeit angesehen werden, die Abweichung war nie größer als  $2 \cdot 10^{-5}$ .\*

#### 3. Die Phasenänderung $\delta_\nu$ bei endlichem Kern

Nachdem wir die Lösung für  $\psi$  und  $\varphi$  außerhalb des Kernes kennen, können wir die Phasenänderung

$$\delta_\nu = \eta_\nu - \eta_\nu^c$$

gegenüber der Phase  $\eta_\nu^c$  des reinen Coulomb-Potentials angeben. Dazu benutzen wir das bekannte asymptotische Verhalten<sup>2</sup> der hyperbolischen Funktionen  ${}_1F_1$ . Dann wird

$$G_\nu(r) \sim \frac{1}{r^{1/2}} \{ (\psi_1 + A\psi_2) + B(\psi_1 + A\psi_2)^* \} \\ \simeq \frac{1}{Kr} \sin(Kr + \gamma \ln 2Kr - \frac{l}{2} \pi + \eta_\nu^c + \delta_\nu).$$

Dabei ist (vgl.<sup>2</sup>)

$$e^{2i\eta_\nu^c} = -B_c \frac{\Gamma(1 + \varrho_\nu - i\gamma)}{\Gamma(1 + \varrho_\nu + i\gamma)} e^{-i\pi(\varrho_\nu - l)}$$

und

$$e^{2i\delta_\nu} = \frac{B}{B_c} \frac{(1 + \kappa_a A)^*}{1 + \kappa_a A} = \left( \frac{1 + \kappa_a A^{**}}{1 + \kappa_b A} \right).$$

Für große Energien ist  $\gamma' = 0$ , also  $B_{c\nu} = -B_{c-\nu}$ . In  $e^{2i\eta_\nu}$  ist dann  $B_c \cdot e^{i\pi l}$  für positives und negatives  $\nu$  gleich groß; alle anderen Faktoren hängen nur quadratisch von  $\nu$  ab, daher gilt  $\eta_\nu = \eta_{-\nu}$ .

#### 4. Der Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  folgt, wie am Anfang gesagt, aus den Funktionen  $f(\Theta)$  und  $g(\Theta)$ . Zerlegen wir diese in den Anteil, der zum reinen Coulomb-Feld gehört, und den Zusatz, der die endliche Ausdehnung des Kernes durch die Phasen mit  $\nu = \pm 1$  berücksichtigt, so wird

$$f = f_c + \frac{1}{2iK} \{ e^{2i\eta_1^c} (e^{2i\delta_1} - 1) \\ + e^{2i\eta_{-1}^c} (e^{2i\delta_{-1}} - 1) \cos \Theta \},$$

$$g = g_c + \frac{1}{2iK} \{ e^{2i\eta_{-1}^c} (e^{2i\delta_{-1}} - 1) \sin \Theta \}.$$

\*\* Tabellen für  $A/R^{2\varrho}$ ,  $\kappa_a$  und  $\kappa_b$  können als Blaudruck angefordert werden.

Bei Bartlett und Watson<sup>5</sup> sind Funktionen  $F$  und  $G$  tabelliert, die mit  $f_c$  und  $g_c$  folgendermaßen zusammenhängen:

$$K f_c = -i\gamma' F + G,$$

$$K g_c = i\gamma' \operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2} \cdot F + \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \cdot G.$$

Die relative Abweichung des differentiellen Wirkungsquerschnittes  $-\frac{\sigma - \sigma_c}{\sigma_c}$  wird in der folgenden Tab. 2 angegeben.

$\varepsilon$	$e^{-2i\delta_1}$		$e^{-2i\delta_{-1}}$	
	Re	Im	Re	Im
$q = 0$				
0,62	1,0000	0,0060	1,0000	0,0013
1,14	1,0000	0,0128	1,0000	0,0062
2,18	0,9995	0,0307	0,9998	0,0215
5,00	0,9954	0,0964	0,9965	0,0834
10,00	0,9705	0,2413	0,9741	0,2261
15,00	0,9194	0,3934	0,9257	0,3784
20,00	0,8438	0,5367	0,8523	0,5230
25,00	0,7485	0,6632	0,7587	0,6514
28,00	0,6842	0,7293	0,6951	0,7188
$q = 1$				
0,62	1,0000	0,0040	1,0000	0,0008
1,14	1,0000	0,0085	1,0000	0,0041
2,18	0,9998	0,0206	0,9999	0,0144
5,00	0,9978	0,0660	0,9984	0,0569
10,00	0,9854	0,1705	0,9872	0,1593
15,00	0,9582	0,2861	0,9616	0,2745
20,00	0,9159	0,4015	0,9207	0,3901
25,00	0,8596	0,5110	0,8663	0,4999
28,00	0,8207	0,5713	0,8174	0,5673

Tab. 1. Werte von  $e^{-2i\delta_\nu}$  für  $q = 0$  (oben) und  $q = 1$  (unten).

### III. Ergebnisse

Die relative Abweichung des Wirkungsquerschnittes  $(\sigma - \sigma_c)/\sigma_c$  ist für Quecksilber in Abhängigkeit von Energie und Winkel aus den Abb. 2a und b abzulesen. Dabei bedeutet

$q=0$  oberflächengeladener Kern,

$q=1$  homogen geladener Kern.

(Für  $q=0$  schließen sich unsere Kurven bei großen Energien an die von Acheson an. Für  $q=1$  dagegen sind unsere Abweichungen kleiner.)

Für mittlere Energien fällt die Abweichung ungefähr proportional  $(KR)^{1,5}$  ab. Daher können die großen Abweichungen (bis zu 30% bei 150°), die von Bothe und Kinzinger<sup>9</sup> an 150–400 KeV Elektronen gemessen wurden, nicht von der endlichen Kerngröße herrühren. — Für Elektronen von 2,2 MeV kinetischer Energie ( $\varepsilon=2,7$ ) liefern unsere Rechnungen Abweichungen von 9% beim Winkel von 120° (und  $q=0$ ). Bei diesem Streuwinkel und dieser Energie maßen Paul und Reich<sup>10</sup> Abweichungen von 20%, die also zum Teil durch die endliche Kerngröße erklärt werden können.

$\varepsilon$	KR	90°	120°	150°	180°
$q = 0$					
0,62	0,0159	0,0027	0,0058	0,0079	0,0088
1,14	0,0445	0,0139	0,0212	0,0276	0,0340
2,18	0,0921	0,0416	0,0587	0,0695	0,0976
5,00	0,2160	0,1421	0,1930	0,2100	0,3064
10,00	0,4336	0,3548	0,4621	0,4613	0,6406
15,00	0,6508	0,5575	0,6914	0,6921	0,8435
20,00	0,8679	0,7245	0,8465	0,8051	0,9236
25,00	1,0850	0,8465	0,9194	0,8151	0,9173
28,00	1,2153	0,8920	0,9251	0,7747	0,8869
$q = 1$					
0,62	0,0159	0,0018	0,0039	0,0053	0,0058
1,14	0,0445	0,0093	0,0141	0,0184	0,0228
2,18	0,0921	0,0280	0,0395	0,0470	0,0665
5,00	0,2160	0,0980	0,1340	0,1467	0,2196
10,00	0,4336	0,2557	0,3394	0,3586	0,5003
15,00	0,6508	0,4195	0,5386	0,5541	0,7155
20,00	0,8679	0,5699	0,7041	0,7023	0,8508
25,00	1,0850	0,6981	0,8250	0,7926	0,9115
28,00	1,2153	0,7661	0,8758	0,8162	

Tab. 2. Werte von  $-(\sigma - \sigma_c)/\sigma_c$  für  $q = 0$  (oben) und  $q = 1$  (unten).

Ob die übrigen Abweichungen auf Strahlungskorrekturen zurückgeführt werden können, ist noch ungeklärt, da bisher keine exakten Rechnungen für große Kerne und Winkel vorliegen. Die von Schwinger durchgeführte Bornsche Näherung ist unabhängig von  $Z$  und liefert daher keine Erklärung für die vorliegenden, stark von  $Z$  abhängigen, Meßergebnisse.

Wir haben als Radius für die Ladungsverteilung im Kern den üblichen Kernradius  $R = A^{1/3} \cdot 1,45 \cdot 10^{-13}$  cm benutzt. Nach neueren Messungen<sup>11</sup> scheinen

<sup>9</sup> W. Bothe, Z. Naturforschg. **5a**, 8 [1950]; E. Kinzinger u. W. Bothe, ebd. **7a**, 390 [1952]; E. Kinzinger, ebd. **8a**, 312 [1953].

<sup>10</sup> W. Paul u. H. Reich, Z. Phys. **131**, 326 [1952].

<sup>11</sup> Lyman, Hanson u. Scott, Phys. Rev. **84**, 626 [1951]. — Cooper u. Henley, Bull. Amer. Phys. Soc. **28**, 56 [1953]. — Pidd, Hammer u. Raka, Phys. Rev. **92**, 436 [1953]. — Hofstadter, Fechter u. McIntyre, ebd. **92**, 978 [1953].

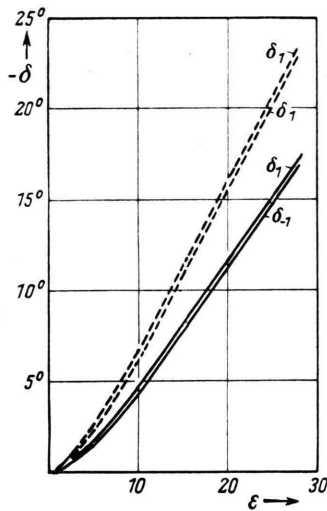


Abb. 1. Änderung der Streuphasen für den Quecksilberkern in Abhängigkeit von der Energie  $E = \varepsilon \cdot 2mc^2$ .

---  $q = 0$ : oberflächen-  
ladener Kern,  
—  $q = 1$ : homogen geladener Kern;

Kernradius:

$$R = A^{1/3} \cdot 1,45 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

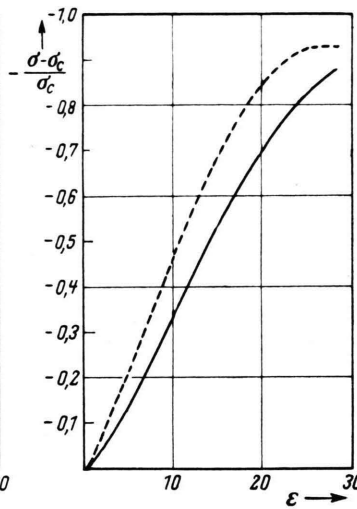


Abb. 2a.

Abb. 2. Relative Änderung des Wirkungsquerschnitts von Quecksilber

a) für  $120^\circ$  in Abhängigkeit von der Energie  $\varepsilon$  [MeV],

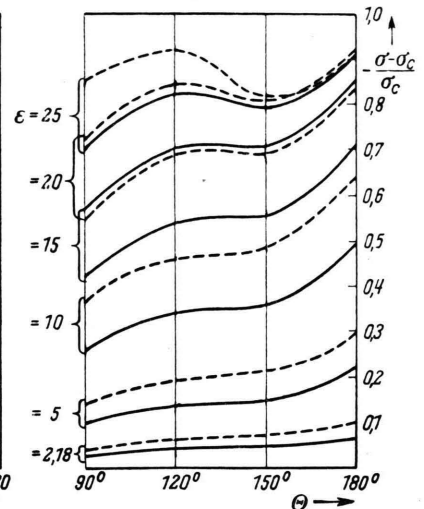


Abb. 2b.

b) in Abhängigkeit vom Winkel  $\theta$ . ---  $q = 0$ , —  $q = 1$ .

die Protonen enger auf das Kerninnere konzentriert zu sein als die Neutronen und ihre Dichte langsamer abzufallen. Der Protonenradius wird auf  $R = A^{1/3} \cdot 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  geschätzt. Die Schätzung beruht auf der Annahme, daß nur die endliche Kerngröße an der Abweichung von reiner Mott-Streuung schuld ist. Falls diese Experimente richtig gedeutet werden, ist die relative Änderung des Wirkungsquerschnittes bei denselben Energien kleiner. Da die Resultate unserer Rechnung nur von dem Produkt  $kR$  abhängen, erhält man dann die Abweichungen

für die neuen Protonenradien näherungsweise, indem man in der Tabelle nicht für den richtigen Wert von  $kR$  (bzw.  $\varepsilon$ ) abliest, sondern für den reduzierten Wert  $(kR)' = (kR) \cdot \frac{R_{\text{neu}}}{R_{\text{alt}}}$ .

Die Verf. danken Herrn Prof. L. Biermann für die Erlaubnis zur Benutzung der Göttinger Elektronenrechenmaschine G 1, ohne deren Hilfe die Durchführung der numerischen Rechnung kaum möglich gewesen wäre.